

***П.4. Делимость.
Основные понятия.***

$$a : b = q$$

a – делимое, b – делитель, q – частное.

Определение. Пусть даны два натуральных числа a и b . Если существует такое q , что выполняется равенство

$$a = bq,$$

то говорят, что число a делится на число b .

a – делимое, b – делитель, q – частное.

Свойства делимости:

1. Если $a : c$ и $c : b$, то $a : b$.
2. Если $a : b$ и $c : b$, то $(a+c) : b$.
3. Если $a : b$ и c не делится на b , то $(a+c)$ не делится на b .
4. Если $a : b$ и $(a+c) : b$, то $c : b$.
5. Если $a : b_1$ и $c : b_2$, то $ac : b_1b_2$.
6. Если $a : b$ и c – любое натуральное число, то $ac : bc$, если $ac : bc$, то $a : b$.

7. Если $a : b$ и c – любое натуральное число, то $ac : b$.

8. Если $a : b$ и $c : b$, то для любых натуральных n и k справедливо соотношение $(an+ck):b$.

9. Среди n последовательно натуральных чисел одно и только одно делится на n .

Простые и составные числа

Определение. Если натуральное число имеет только два делителя – само себя и 1, то его называют простым числом; если оно имеет более двух делителей, то его называют составным числом.

Число 1 не является ни простым, ни составным.

Теорема. Если натуральное число a больше натурального числа b , и a не делится на b , то существует, и притом только одна, пара натуральных чисел q и r , причем $r < b$, такая, что выполняется равенство

$$a = bq + r.$$

q – неполное частное, r – остаток.

НОД натуральных чисел

Определение. Наибольшим общим делителем (НОД) натуральных чисел a, b, c, \dots называется наибольшее натуральное число, на которое делятся нацело числа a, b, c, \dots

Определение. Натуральные числа a, b, c, \dots называются взаимно простыми, если их НОД равен 1.

Для нахождения **НОД** чисел a, b, c, \dots :

- 1) выписывают разложения на простые множители чисел a, b, c, \dots ;
- 2) перечисляют все простые множители, входящие во все разложения;
- 3) каждый из перечисленных множителей возводят в минимальную степень, с которой этот множитель входит в разложения.

№ 1

Найти наибольший общий делитель чисел 48, 60, 72.

Решение:

48	2	60	2	72	2
24	2	30	2	36	2
12	2	15	3	18	2
6	2	5	5	9	3
3	3	1		3	3
1				1	

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$$

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$\text{НОД}(48, 60, 72) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

НОК натуральных чисел

Определение. Наименьшим общим кратным (НОК) натуральных чисел a, b, c, \dots называется наименьшее натуральное число, которое нацело делится на эти числа a, b, c, \dots

Для нахождения **НОК** Чисел a, b, c, \dots :

- 1) выписывают разложения на простые множители чисел a, b, c, \dots ;
- 2) перечисляют все простые множители, входящие хотя бы в одно из этих разложений;
- 3) каждый из перечисленных множителей возводят в максимальную степень, с которой этот множитель входит в разложения;
- 4) произведение полученных степеней простых множителей дает **НОК** чисел a, b, c, \dots

№ 2

Найти наименьшее общее кратное чисел 48, 60, 72.

Решение:

48		2	60		2	72		2	$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$
24		2	30		2	36		2	$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
12		2	15		3	18		2	$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$
6		2	5		5	9		3	
3		3	1			3		3	
1						1			

$$\text{НОК}(48, 60, 72) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$$

Теорема. Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство

$$\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab.$$

Следствие. Если числа a и b взаимно простые, то $\text{НОК}(a, b) = ab$.

Основные признаки делимости

1. Число делится (без остатка или нацело) на число 2, если его последняя цифра четная или 0.
2. Число делится на число 3, если сумма его цифр делится на 3.
3. Число делится на число 4, если две его последние цифры образуют число, которое делится на 4, или являются нулями.

4. Число делится на число 5, если его последняя цифра 0 или 5.

5. Число делится на число 8, если три его последние цифры образуют число, которое делится на 8, или являются нулями.

6. Число делится на число 9, если сумма его цифр делится на 9.

7. Число делится на число 10, если его последняя цифра нуль.

№ 3

Определите: на какие из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 15, 18, 20 делится без остатка число 562 320.



№ 4

Определите, простым или составным является число 87 516 540 321.



№ 5

Число N дает при делении на 8 остаток 3. Какой остаток при делении на 8 дает число в четыре раза больше данного?



№ 6

Два числа при делении на 16 дают остаток 8.
Доказать, что разность и сумма этих чисел без остатка делятся на 16.



№ 7

Разложить на простые множители число 7000.



- 1) 562320 – четное, значит делится без остатка на 2;
- 2) $5 + 6 + 2 + 3 + 2 + 0 = 18$, 18 делится на 3 и на 9, значит 562320 делится на 3 и на 9;
- 3) 562320 – две последние цифры образуют число 20, которое делится на 4, значит 562 320 делится на 4;
- 4) 562320 – оканчивается на 0, значит 562320 делится на 5 и на 10;
- 5) Т.к. 562320 делится на 2 и на 3, а числа 2 и 3 – взаимно простые, то 562320 делится на произведение 2 и 3, т.е. на 6;
- 6) 562320 – три последние цифры образуют число 320, которое делится на 8, значит 562320 делится на 8;
- 7) Т.к. 562320 делится на 3 и 5 (3 и 5 – взаимно простые), то 562320 делится на 15;
- 8) Т.к. 562320 делится на 2 и 9 (2 и 9 – взаимно простые), то 562320 делится на 18;
- 9) Т.к. 562320 делится на 4 и 5 (4 и 5 – взаимно простые), то 562320 делится на 20.



Если найдется хотя бы один делитель числа 87 516 540 321, отличный от 1 и самого этого числа, то 87 516 540 321 – составное.

$$8 + 7 + 5 + 1 + 6 + 5 + 4 + 0 + 3 + 2 + 1 = 42$$

42 делится на 3, значит и число

87 516 540 321 делится на 3, а значит заданное число является составным.



$$N = 8b + 3$$

$$4N = 4(8b + 3) = 32b + 12 = 8 \cdot 4b + (8 \cdot 1 + 4)$$

$$4N = 8(4b + 1) + 4$$

Ответ: 4.



$$\begin{array}{r} + n = 16b_1 + 8 \\ k = 16b_2 + 8 \end{array}$$

$$n + k = 16b_1 + 16b_2 + 8 + 8$$

$$\begin{aligned} n + k &= 16b_1 + 16b_2 + 8 + 8 = \\ &= 16(b_1 + b_2) + 16 = \\ &= 16(b_1 + b_2 + 1) + 0. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \underline{-} n = 16b_1 + 8 \\ k = 16b_2 + 8 \end{array}$$

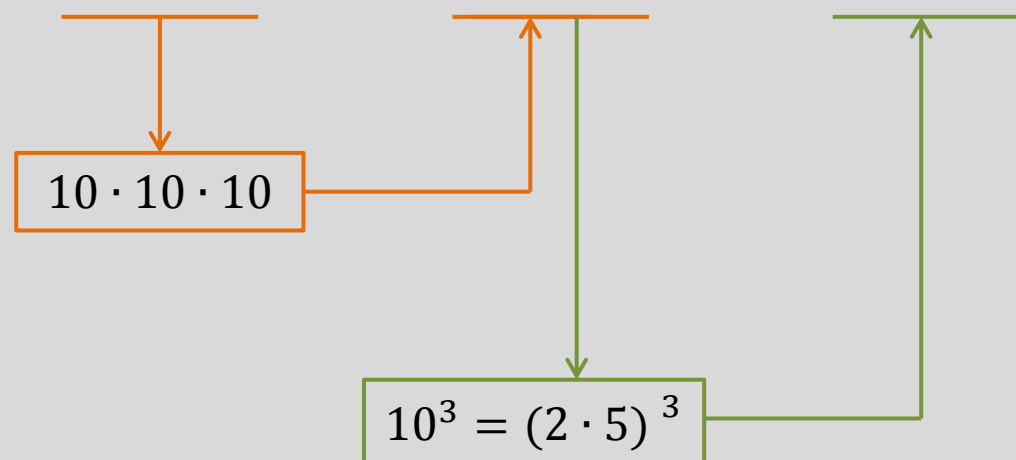
$$n - k = 16b_1 - 16b_2 + 8 - 8$$

$$\begin{aligned} n - k &= 16b_1 - 16b_2 + 8 - 8 = \\ &= 16(b_1 - b_2) + 0. \end{aligned}$$



Разложить на простые множители число 7000

$$7000 = 7 \cdot 1000 = 7 \cdot 10^3 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3$$



Используемая литература

1. Алгебра.10 класс. Часть 1. Учебник. Профильный уровень. Мордкович А.Г., Семенов П. В.;